|  |  |
| --- | --- |
| Kelompok | - |
| Nama Mahasiswa/NIM | Septian Cikal Nugraha - 301220049 |
| Judul Tugas | Buatlah laporan tentang tutorial Simulasi Pemodelan Markov |
| Tahun | 2024 |

|  |  |
| --- | --- |
| **JUDUL TUGAS** | |
|  | **Teori Pendukung** |
| **Proses stokastik** adalah kumpulan variabel acak yang didefinisikan pada ruang probabilitas, yang berubah-ubah seiring waktu atau parameter lain. Proses ini digunakan untuk memodelkan sistem atau fenomena yang berkembang secara acak dan tidak dapat diprediksi sepenuhnya tetapi memiliki distribusi probabilitas tertentu.  Secara formal, sebuah proses stokastik dapat didefinisikan sebagai himpunan {X(t):t∈T}\{X(t) : t \in T\}{X(t):t∈T}, di mana X(t)X(t)X(t) adalah variabel acak yang didefinisikan untuk setiap nilai ttt dalam indeks TTT, yang bisa berupa waktu atau parameter lainnya. Proses stokastik melibatkan hubungan probabilistik antar variabel acak pada waktu atau parameter yang berbeda.  **Contoh dalam kehidupan nyata**:   * **Keuangan**: Pergerakan harga saham atau instrumen keuangan lainnya sering dimodelkan sebagai proses stokastik. * **Fisika**: Gerak Brown, yang menggambarkan gerakan acak partikel dalam fluida, adalah contoh dari proses stokastik. * **Biologi**: Penyebaran penyakit dalam populasi atau pertumbuhan populasi bakteri juga dapat dimodelkan sebagai proses stokastik. * **Teknik dan Telekomunikasi**: Proses stokastik digunakan dalam pemodelan sinyal acak dan noise pada sistem komunikasi.   Proses stokastik dapat bersifat **diskrit** (misalnya rantai Markov) atau **kontinu** (misalnya proses Wiener/gerak Brown). Properti penting yang sering dikaji dalam proses stokastik meliputi distribusi probabilitas, harapan matematis, autokorelasi, dan waktu-waktu transisi antar-keadaan.  **Rantai Markov** (Markov Chains) adalah jenis proses stokastik yang memiliki properti **Markov**, yaitu sifat bahwa keadaan masa depan dari proses hanya bergantung pada keadaan saat ini dan tidak bergantung pada urutan keadaan sebelumnya. Dengan kata lain, rantai Markov mengikuti prinsip **"memori pendek"**, di mana sejarah lengkap dari kejadian tidak relevan, melainkan hanya keadaan saat ini yang menentukan transisi ke keadaan berikutnya.  **Definisi Formal**  Sebuah rantai Markov adalah sebuah proses stokastik yang didefinisikan oleh himpunan variabel acak {Xn}n=0∞\{X\_n\}\_{n=0}^{\infty}{Xn​}n=0∞​, di mana XnX\_nXn​ menunjukkan keadaan sistem pada waktu ke-nnn. Proses ini memiliki properti Markov jika untuk semua nnn dan semua keadaan x0,x1,...,xn+1x\_0, x\_1, ..., x\_{n+1}x0​,x1​,...,xn+1​:  P(Xn+1=xn+1∣X0=x0,X1=x1,...,Xn=xn)=P(Xn+1=xn+1∣Xn=xn).P(X\_{n+1} = x\_{n+1} | X\_0 = x\_0, X\_1 = x\_1, ..., X\_n = x\_n) = P(X\_{n+1} = x\_{n+1} | X\_n = x\_n).P(Xn+1​=xn+1​∣X0​=x0​,X1​=x1​,...,Xn​=xn​)=P(Xn+1​=xn+1​∣Xn​=xn​).  Ini berarti probabilitas untuk transisi ke keadaan berikutnya hanya bergantung pada keadaan saat ini XnX\_nXn​ dan tidak pada semua keadaan sebelumnya.  **Komponen Utama Rantai Markov**   1. **Ruang Keadaan (State Space)**: Himpuan dari semua kemungkinan keadaan yang dapat dicapai oleh proses. Ruang ini bisa diskrit atau kontinu. 2. **Matriks Transisi (Transition Matrix)**: Matriks yang menggambarkan probabilitas transisi dari satu keadaan ke keadaan lain. Jika PijP\_{ij}Pij​ menunjukkan probabilitas berpindah dari keadaan iii ke keadaan jjj, maka matriks transisi dapat dinyatakan sebagai:   P=[P11P12…P1nP21P22…P2n⋮⋮⋱⋮Pn1Pn2…Pnn].P = \begin{bmatrix} P\_{11} & P\_{12} & \dots & P\_{1n} \\ P\_{21} & P\_{22} & \dots & P\_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P\_{n1} & P\_{n2} & \dots & P\_{nn} \end{bmatrix}.P=​P11​P21​⋮Pn1​​P12​P22​⋮Pn2​​……⋱…​P1n​P2n​⋮Pnn​​​.   1. **Distribusi Stasioner (Stationary Distribution)**: Sebuah distribusi probabilitas π\piπ sedemikian rupa sehingga πP=π\pi P = \piπP=π. Ini menggambarkan distribusi keadaan jangka panjang dari proses ketika proses mencapai keseimbangan.   **Contoh Sederhana**  Sebuah rantai Markov sederhana bisa berupa permainan koin, di mana seseorang berpindah dari satu titik ke titik lain berdasarkan hasil lemparan koin. Jika berada di titik AAA, orang tersebut mungkin tetap di AAA dengan probabilitas 0,5 atau berpindah ke BBB dengan probabilitas 0,5. Matriks transisinya akan terlihat seperti:  P=[0.50.50.50.5].P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.P=[0.50.5​0.50.5​].  **Jenis Rantai Markov**   1. **Rantai Markov Diskrit**: Proses di mana transisi terjadi pada interval waktu yang diskrit. 2. **Rantai Markov Kontinu (Continuous-Time Markov Chain)**: Proses di mana transisi dapat terjadi pada waktu yang kontinu.   **Aplikasi Rantai Markov**   * **Keuangan**: Untuk memodelkan pergerakan harga saham. * **Pengolahan Bahasa Alami (NLP)**: Untuk model bahasa di mana probabilitas suatu kata hanya bergantung pada kata sebelumnya. * **Teori Antrian**: Untuk memodelkan antrian pelanggan dalam suatu sistem layanan. * **Simulasi Monte Carlo**: Untuk mengeksplorasi distribusi probabilitas melalui simulasi acak.   Rantai Markov menawarkan pendekatan yang kuat untuk memodelkan sistem yang memiliki ketidakpastian dalam transisi antar-keadaannya, dan sangat berguna dalam banyak bidang analisis data dan pengambilan keputusan.  .  **Simulasi dalam proses stokastik dan rantai Markov** digunakan untuk memodelkan dan menganalisis sistem yang dipengaruhi oleh elemen acak. Simulasi ini membantu memprediksi perilaku jangka panjang, memahami distribusi hasil, dan mengevaluasi kinerja sistem dalam berbagai kondisi.  **1. Simulasi dalam Proses Stokastik**  Simulasi proses stokastik melibatkan pembuatan data sampel yang mengikuti pola acak sesuai dengan distribusi probabilitas tertentu. Tujuannya adalah untuk mengamati bagaimana proses berkembang dari waktu ke waktu dan mengidentifikasi pola yang mungkin tidak mudah ditemukan dengan analisis analitik.  **Contoh penggunaan simulasi proses stokastik**:   * **Keuangan**: Simulasi Monte Carlo digunakan untuk memodelkan pergerakan harga saham, di mana harga di masa depan bergantung pada gerak Brownian dan volatilitas. * **Asuransi**: Simulasi untuk memprediksi klaim asuransi di masa depan berdasarkan distribusi historis klaim. * **Biologi**: Model stokastik untuk mempelajari penyebaran penyakit dalam populasi atau pertumbuhan bakteri.   **Metode yang digunakan dalam simulasi stokastik**:   * **Monte Carlo Simulation**: Teknik ini mengandalkan pengulangan eksperimen acak untuk menghasilkan hasil simulasi. Simulasi Monte Carlo digunakan untuk mengevaluasi distribusi hasil potensial dari model stokastik. * **Simulasi Numerik**: Digunakan untuk menyimulasikan sistem kompleks yang melibatkan persamaan diferensial stokastik.   **2. Simulasi dalam Rantai Markov**  Dalam konteks rantai Markov, simulasi digunakan untuk mempelajari bagaimana suatu sistem berpindah antar-keadaan seiring waktu berdasarkan matriks transisi. Simulasi ini berguna untuk mengestimasi distribusi stasioner, menentukan kemungkinan jalur, dan mengamati perilaku jangka panjang dari sistem.  **Langkah-langkah dasar dalam simulasi rantai Markov**:   1. **Definisikan ruang keadaan dan matriks transisi**: Tentukan keadaan sistem dan probabilitas transisi antar-keadaan. 2. **Pilih keadaan awal**: Mulailah simulasi dari keadaan awal yang ditentukan. 3. **Transisi antar-keadaan**: Gunakan matriks transisi untuk menentukan keadaan berikutnya berdasarkan probabilitas transisi. 4. **Ulangi proses**: Lakukan proses ini untuk banyak langkah waktu (iterasi) untuk mengamati perkembangan sistem. 5. **Analisis hasil**: Lihat hasil simulasi untuk menemukan pola, seperti distribusi stasioner atau rata-rata waktu yang dihabiskan di tiap keadaan.   **Contoh simulasi rantai Markov**:   * **Model cuaca**: Simulasi kondisi cuaca di mana keadaan dapat berupa "cerah", "berawan", dan "hujan", dengan probabilitas transisi antar-keadaan ditentukan oleh data historis. * **Model layanan pelanggan**: Simulasi antrian di pusat panggilan, di mana pelanggan datang, menunggu, dilayani, dan pergi, dengan probabilitas transisi yang terkait dengan kedatangan dan waktu layanan.   **Tools dan software untuk simulasi**:   * **Python**: Dengan pustaka seperti NumPy dan pandas untuk simulasi sederhana, serta simpy untuk model simulasi yang lebih kompleks. * **R**: Memiliki paket markovchain untuk memodelkan dan menyimulasikan rantai Markov. * **MATLAB**: Digunakan untuk simulasi stokastik lanjutan dengan alat pemrograman dan visualisasi. * **Simulasi Monte Carlo**: Implementasi dapat dilakukan dengan berbagai bahasa pemrograman dan perangkat lunak seperti Python, R, dan Excel (dengan add-on khusus).   **Manfaat Simulasi Proses Stokastik dan Rantai Markov:**   * **Eksplorasi skenario**: Menilai bagaimana sistem bereaksi terhadap berbagai skenario dan variabel acak. * **Prediksi dan perencanaan**: Menghasilkan prediksi yang lebih realistis dalam situasi yang kompleks. * **Optimasi**: Membantu dalam optimasi sistem yang bergantung pada komponen acak. * **Pelatihan dan pengajaran**: Alat yang berguna dalam pengajaran konsep stokastik untuk memahami transisi antar-keadaan dan distribusi jangka panjang.   Simulasi proses stokastik dan rantai Markov memberikan wawasan penting tentang dinamika sistem acak, dan metode ini sering diterapkan di bidang seperti keuangan, ilmu data, logistik, biologi, dan rekayasa.  Rantai Markov memiliki berbagai aplikasi dalam banyak bidang karena sifatnya yang memodelkan transisi antar-keadaan dalam sistem acak. Berikut adalah beberapa contoh aplikasi dari rantai Markov di berbagai bidang:  **1. Pengolahan Bahasa Alami (NLP)**   * **Model Bahasa**: Rantai Markov digunakan dalam model bahasa untuk memprediksi kata berikutnya dalam sebuah teks. Probabilitas suatu kata hanya bergantung pada kata sebelumnya atau beberapa kata sebelumnya, yang dikenal sebagai model Markov orde ke-n. * **Spell-checking dan Autokoreksi**: Rantai Markov digunakan untuk memprediksi kata yang paling mungkin berdasarkan konteks sekitarnya. * **Pengenalan Suara**: Dalam sistem pengenalan suara, rantai Markov digunakan untuk memodelkan urutan fonem atau kata-kata.   **2. Keuangan**   * **Pemodelan Harga Saham**: Rantai Markov digunakan untuk memodelkan pergerakan harga saham dengan asumsi bahwa harga di masa depan hanya bergantung pada harga saat ini (proses Markov). * **Analisis Risiko dan Prediksi Kredit**: Rantai Markov dapat digunakan untuk menilai perubahan status kredit (misalnya, dari "baik" ke "default") berdasarkan data historis. * **Pemodelan Portofolio**: Rantai Markov digunakan dalam analisis portofolio untuk memprediksi pergerakan aset dalam periode tertentu.   **3. Teori Antrian dan Operasional**   * **Model Antrian Pelanggan**: Digunakan dalam pemodelan sistem antrian, seperti layanan pelanggan di bank, call center, atau bandara, di mana probabilitas seseorang berpindah dari antrian ke layanan bergantung pada keadaan saat ini. * **Simulasi Sistem Transportasi**: Rantai Markov dapat memodelkan pergerakan kendaraan dalam sistem lalu lintas, misalnya simulasi bagaimana kendaraan berpindah dari satu titik ke titik lainnya.   **4. Biologi dan Kesehatan**   * **Penyebaran Penyakit**: Digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi, di mana keadaan dapat berupa "rentan", "terinfeksi", dan "sembuh". * **Proses Genetik**: Rantai Markov digunakan untuk memodelkan urutan DNA atau RNA, di mana transisi antar-keadaan menggambarkan kemungkinan perubahan basa nukleotida.   **5. Ilmu Komputer dan Algoritma**   * **PageRank (Google Search Engine)**: Algoritma PageRank menggunakan rantai Markov untuk menentukan peringkat halaman web. Model ini memodelkan pergerakan acak pengguna internet dari satu halaman ke halaman lainnya berdasarkan tautan yang ada. * **Algoritma Kompresi Data**: Rantai Markov digunakan dalam teknik kompresi teks dan data di mana pola-pola yang sering muncul dianalisis untuk memperkirakan urutan data berikutnya.   **6. Game dan Simulasi**   * **Model Perilaku Pemain**: Dalam pengembangan video game, rantai Markov digunakan untuk memodelkan perilaku musuh atau pemain non-pemain (NPC) agar terlihat lebih realistis. * **Simulasi Permainan Papan**: Rantai Markov digunakan untuk mempelajari strategi optimal dalam permainan seperti catur, di mana setiap langkah tergantung pada posisi papan saat ini.   **7. Robotika dan Kendaraan Otonom**   * **Navigasi**: Rantai Markov diterapkan dalam algoritma navigasi robot untuk memprediksi pergerakan di dalam peta berdasarkan keadaan saat ini. * **Pemodelan Lokalisasi**: Robot dapat menggunakan rantai Markov untuk memperkirakan posisinya di suatu ruang berdasarkan data sensor dan peta yang ada.   **8. Ekonomi dan Ilmu Sosial**   * **Peramalan Ekonomi**: Digunakan untuk memodelkan siklus ekonomi dengan keadaan seperti "pertumbuhan", "stagnasi", dan "resesi". * **Analisis Migrasi Populasi**: Rantai Markov dapat membantu memodelkan perpindahan penduduk antara berbagai wilayah geografis.   **Contoh Sederhana: Model Cuaca**  Bayangkan sebuah sistem prediksi cuaca di mana cuaca hari ini mempengaruhi cuaca esok hari. Misalkan hanya ada tiga jenis cuaca: "cerah", "berawan", dan "hujan". Dengan matriks transisi:  P=[0.60.30.10.40.40.20.30.30.4]P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ \end{bmatrix}P=​0.60.40.3​0.30.40.3​0.10.20.4​​  Angka-angka tersebut menunjukkan probabilitas transisi dari satu keadaan ke keadaan lain. Misalnya, jika hari ini cerah, probabilitas besok juga cerah adalah 0.6.  Rantai Markov sangat fleksibel dan efektif untuk memodelkan banyak sistem yang berubah-ubah secara acak dengan properti "memori pendek". | |
|  | **Alat Dan Bahan** |
| * **Laptop** * **Microsoft Word** * **Visual Studio Code** * **Github** | |
|  | **Tutorial** |
| **a. Deskripsi Studi Kasus**  Studi kasus ini berfokus pada pemodelan perubahan penggunaan pulsa dan kuota internet pada handphone dari tahun ke tahun. Probabilitas perubahan penggunaan ini dipengaruhi oleh kondisi penggunaan pulsa dan kuota internet pada tahun sebelumnya. Probabilitas yang digunakan:   * Probabilitas untuk tetap menggunakan pulsa pada tahun berikutnya adalah 0.7, dan untuk beralih ke kuota internet adalah 0.3. * Probabilitas untuk tetap menggunakan kuota internet pada tahun berikutnya adalah 0.4, dan untuk beralih ke pulsa adalah 0.6.   **b. Matriks Transisi dan Rumus-Rumus yang Digunakan**  Matriks transisi **T** menggambarkan probabilitas peralihan penggunaan antara pulsa dan kuota internet. Berikut adalah matriks transisi yang digunakan:   * Baris pertama menggambarkan perubahan penggunaan pulsa. * Baris kedua menggambarkan perubahan penggunaan kuota internet.   Matriks transisi **T**:  T=[0.70.30.60.4]T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}T=[0.70.6​0.30.4​]  Vektor keadaan **P** menggambarkan distribusi probabilitas penggunaan pulsa dan kuota internet pada waktu tertentu. Untuk mencapai kondisi stabil, kita akan menggunakan rumus iterasi:  Pn+1=Pn⋅TP\_{n+1} = P\_n \cdot TPn+1​=Pn​⋅T  Kondisi stabil tercapai ketika perubahan antar keadaan pada dua tahun berturut-turut sangat kecil:  ∥Pn+1−Pn∥<ϵ\| P\_{n+1} - P\_n \| < \epsilon∥Pn+1​−Pn​∥<ϵ  Dengan ϵ\epsilonϵ adalah ambang batas yang sangat kecil (misalnya, 1e-5).  **c. Pemodelan Menggunakan Python**  *import numpy as np*  *import matplotlib.pyplot as plt*  *# Matriks transisi antara pulsa dan kuota internet*  *T = np.array([[0.7, 0.3], # Baris pertama: Pulsa*  *[0.6, 0.4]]) # Baris kedua: Kuota Internet*  *# Kondisi awal (misalkan dimulai dengan penggunaan pulsa dan kuota internet seimbang)*  *# Anda bisa mengganti initial\_state berdasarkan data tahun 2024, misalnya jika data menunjukkan penggunaan 60% pulsa dan 40% kuota internet*  *initial\_state = np.array([0.6, 0.4])*  *# Iterasi hingga mencapai kondisi stabil (steady state)*  *threshold = 1e-5 # Ambang batas untuk perubahan yang sangat kecil*  *max\_iterations = 1000 # Jumlah iterasi maksimum*  *iteration = 0*  *current\_state = initial\_state*  *# List untuk menyimpan hasil tiap iterasi (untuk visualisasi)*  *history = [current\_state]*  *while iteration < max\_iterations:*  *next\_state = np.dot(current\_state, T)*  *difference = np.linalg.norm(next\_state - current\_state)*    *history.append(next\_state) # Simpan hasil tiap iterasi untuk grafik*    *if difference < threshold:*  *break*    *current\_state = next\_state*  *iteration += 1*  *# Menampilkan hasil*  *print("a. Matriks Transisi T:")*  *print(f"T = \n{T}")*  *print("\nKondisi awal penggunaan (tahun 2024):")*  *print(f"Initial state = {initial\_state}")*  *print(f"\nb. Kondisi stabil dicapai pada iterasi ke-{iteration + 1}:")*  *print(f"Steady state = {next\_state}")*  *# Visualisasi perubahan penggunaan pulsa dan kuota internet dari tahun 2024 ke belakang*  *# Kita akan menampilkan tahun 2024 hingga 2019*  *history = np.array(history)*  *years = np.arange(2024, 2024 - len(history), -1)*  *plt.figure(figsize=(10, 6))*  *plt.plot(years, history[:, 0], label="Pulsa", marker='o')*  *plt.plot(years, history[:, 1], label="Kuota Internet", marker='x')*  *plt.xlabel("Tahun")*  *plt.ylabel("Probabilitas Penggunaan")*  *plt.title("Perubahan Probabilitas Penggunaan Pulsa dan Kuota Internet (2024 - 2019)")*  *plt.legend()*  *plt.grid(True)*  *plt.show()*  *# Pertanyaan c: Prediksi penggunaan lebih dominan antara pulsa dengan kuota internet*  *print("\nc. Penggunaan lebih dominan mana antara pulsa dengan kuota internet?")*  *if next\_state[0] > next\_state[1]:*  *print("Penggunaan pulsa lebih dominan dibanding kuota internet di kondisi stabil.")*  *else:*  *print("Penggunaan kuota internet lebih dominan dibanding pulsa di kondisi stabil.")*  **d. Penjelasan Koding**   **Proses Iterasi**: Program melakukan perhitungan tahun ke tahun berdasarkan matriks transisi hingga mencapai **kondisi stabil**.   **Visualisasi**: Grafik menunjukkan bagaimana probabilitas penggunaan pulsa dan kuota internet berubah dari tahun ke tahun (dari 2024 hingga 2019).   **Prediksi Dominasi**: Program akhirnya membandingkan penggunaan pulsa dan kuota internet di kondisi stabil untuk menentukan mana yang lebih dominan.  **e. Tampilan Grafik Pemodelan dan Simulasi**    **f. Penjelasan grafik**  Grafik tersebut menggambarkan perubahan probabilitas penggunaan pulsa dan kuota internet dari tahun 2024 hingga 2019. Berikut penjelasan rincinya:   1. **Sumbu X**: Menunjukkan rentang tahun dari 2024 (tahun saat ini) ke 2019 (5 tahun ke belakang). 2. **Sumbu Y**: Menunjukkan probabilitas penggunaan pulsa dan kuota internet dalam bentuk persentase. 3. **Garis Biru (Pulsa)**:    * Probabilitas penggunaan pulsa terlihat stabil tinggi pada awal periode (tahun 2024) dan perlahan mulai menurun seiring berjalannya waktu.    * Meskipun menurun, penggunaan pulsa tetap memiliki nilai probabilitas yang lebih tinggi dibandingkan dengan kuota internet sepanjang periode yang dianalisis. 4. **Garis Oranye (Kuota Internet)**:    * Probabilitas penggunaan kuota internet berada pada tingkat yang lebih rendah dibandingkan pulsa, namun terlihat adanya peningkatan kecil pada tahun-tahun terakhir menjelang 2024.    * Ini menunjukkan bahwa walaupun penggunaan kuota internet meningkat, kenaikannya tidak signifikan dibandingkan dengan penggunaan pulsa.   **Interpretasi**:   * **Dominasi Pulsa**: Dari grafik, dapat disimpulkan bahwa penggunaan pulsa lebih dominan dibandingkan dengan kuota internet selama periode yang ditunjukkan. * **Kondisi Stabil**: Grafik menunjukkan bahwa setelah beberapa tahun, perbedaan probabilitas penggunaan pulsa dan kuota internet mulai mendekati kondisi stabil. * **Tren Perubahan**: Meskipun penggunaan kuota internet meningkat, peningkatannya tidak sebanding dengan penurunan penggunaan pulsa, sehingga pulsa tetap mendominasi di akhir periode.   **Kesimpulan**: Dalam jangka panjang, penggunaan pulsa masih memiliki probabilitas yang lebih tinggi dibandingkan kuota internet, meskipun ada kecenderungan kecil untuk penggunaan kuota meningkat. | |
|  | **Link Video Tutorial** |
|  | |
|  | **Referensi:** |
| ***Link referensi :***   1. *Gagniuc, Paul A. (2017). Markov Chains: From Theory to Implementation and Experimentation. USA, NJ: John Wiley & Sons. hlm. 1–235.*[*ISBN*](https://id.wikipedia.org/wiki/International_Standard_Book_Number)[*978-1-119-38755-8*](https://id.wikipedia.org/wiki/Istimewa:Sumber_buku/978-1-119-38755-8)*.* 2. [**^**](https://id.wikipedia.org/wiki/Rantai_Markov#cite_ref-2) [*"Markov chain | Definition of Markov chain in US English by Oxford Dictionaries"*](https://web.archive.org/web/20171215001435/https:/en.oxforddictionaries.com/definition/us/markov_chain)*. Oxford Dictionaries | English. Diarsipkan dari [versi asli](https://en.oxforddictionaries.com/definition/us/markov_chain) tanggal 2017-12-15. Diakses tanggal 2017-12-14.* 3. [**^**](https://id.wikipedia.org/wiki/Rantai_Markov#cite_ref-3) [Definition at Brilliant.org "Brilliant Math and Science Wiki"](https://brilliant.org/wiki/markov-chains/). Retrieved on 12 May 2019 4. [**^**](https://id.wikipedia.org/wiki/Rantai_Markov#cite_ref-KarlinTaylor2012page47_4-0) *Samuel Karlin; Howard E. Taylor (2 December 2012).*[*A First Course in Stochastic Processes*](https://web.archive.org/web/20170323132708/https:/books.google.com/books?id=dSDxjX9nmmMC)*. Academic Press. hlm. 47.*[*ISBN*](https://id.wikipedia.org/wiki/International_Standard_Book_Number)[*978-0-08-057041-9*](https://id.wikipedia.org/wiki/Istimewa:Sumber_buku/978-0-08-057041-9)*. Diarsipkan dari [versi asli](https://books.google.com/books?id=dSDxjX9nmmMC) tanggal 23 March 2017.* 5. [**^**](https://id.wikipedia.org/wiki/Rantai_Markov#cite_ref-Hajek2015_5-0) *Bruce Hajek (12 March 2015).*[*Random Processes for Engineers*](https://web.archive.org/web/20170323134957/https:/books.google.com/books?id=Owy0BgAAQBAJ)*. Cambridge University Press.*[*ISBN*](https://id.wikipedia.org/wiki/International_Standard_Book_Number)[*978-1-316-24124-0*](https://id.wikipedia.org/wiki/Istimewa:Sumber_buku/978-1-316-24124-0)*. Diarsipkan dari [versi asli](https://books.google.com/books?id=Owy0BgAAQBAJ) tanggal 23 March 2017.* 6. [**^**](https://id.wikipedia.org/wiki/Rantai_Markov#cite_ref-LatoucheRamaswami1999_6-0) *G. Latouche; V. Ramaswami (1 January 1999).*[*Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*](https://web.archive.org/web/20170323180008/https:/books.google.com/books?id=Kan2ki8jqzgC&pg=PR4)*. SIAM. hlm. 4–.*[*ISBN*](https://id.wikipedia.org/wiki/International_Standard_Book_Number)[*978-0-89871-425-8*](https://id.wikipedia.org/wiki/Istimewa:Sumber_buku/978-0-89871-425-8)*. Diarsipkan dari [versi asli](https://books.google.com/books?id=Kan2ki8jqzgC&pg=PR4) tanggal 23 March 2017.*   <https://ocw.mit.edu/courses/6-262-discrete-stochastic-processes-spring-2011/39a87732501aeba518cb3cc47e7e3541_MIT6_262S11_chap06.pdf>  <https://id.wikipedia.org/wiki/Rantai_Markov> | |